Gebrochen-rationale Funktionen • Definitionslücken
Übung

1. Bestimmen Sie jeweils die Defintionslücken von f und geben Sie an, von welcher Art diese sind. Bestimmen Sie, falls vorhanden, die stetige Fortsetzung der entsprechenden Funktion.

   a) $f(x) = \frac{3x-3}{x-1}$

   b) $f(x) = \frac{x}{x^4}$

   c) $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$

   d) $f(x) = \frac{x^2-x}{x^3-x^2}$

   e) $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$

   f) $f(x) = \frac{x^2-7x+6}{x^3-6x^2+11x-6}$

   g) $f(x) = \frac{(x+1)^2(x-2)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}$

   h) $f(x) = \frac{1000(x-1)(x-2)(x-3)}{999(x-1)(x+2)(x+3)}$

   i) $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$

   j) $f(x) = \frac{x^2+17x+70}{x^2+1}$

   k) $f(x) = \frac{\frac{4}{3}x^2-\frac{4}{3}x-1}{4x^2-1}$

2. Nehmen Sie Stellung zu folgendem Satz: „Ist der Grad des Nennerpolynoms in einer gebrochen-rationalen Funktion gleich n, so besitzt diese Funktion höchstens n Defintionslücken."

Gebrochen–rationale Funktionen • Defintionslücken
Lösung

1.

a) $f(x) = \frac{3(x-1)}{x-1}$. Es liegt eine hebbare Definitionslücke vor bei $x_1 = 1$.
Stetige Fortsetzung $\tilde{f}(x) = 3$.

b) Definitionslücke bei $x_1 = 0$, hier liegt eine Unendlichkeitsstelle der Ordnung $4 - 1 = 3$ vor (d.h. Polstelle mit Vorzeichenwechsel).

c) Polstelle 2. Ordnung ohne Vorzeichenwechsel bei $x_1 = 3$.

d) $f(x) = \frac{x(x-1)}{x^2(x-1)}$, Definitionslücken bei $x_1 = 0$ (Unendlichkeitsstelle der Ordnung 1 also mit Vorzeichenwechsel) und $x_2 = 1$ (hebbare Definitionslücke).

Hinweis: Die **stetige Fortsetzung** $\tilde{f}$ von f erhalten wir durch das Herauskürzen einer hebbaren Definitionslücke. Die Graphen von f und $\tilde{f}$ sind identisch bis auf das entsprechende Loch. Der Graph dieser Funktion entspricht dem von $\tilde{f}(x) = \frac{1}{x}$ mit der Ausnahme, dass bei $x_2 = 1$ ein Loch vorliegt.

e) f kann z.B. mit der Mitternachtsformel für Zähler und Nenner zerlegt werden in $f(x) = \frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)(x-1)}$.
Damit hebbare Definitionslücke bei $x_1 = 2$ und Polstelle 1. Ordnung (mit Vorzeichenwechsel) bei $x_2 = 1$. Stetige Fortsetzung $\tilde{f}(x) = \frac{x+3}{x-1}$.

Hinweis: Bei $x_3 = -3$ liegt keine Definitionslücke vor, sondern lediglich eine Nullstelle der Funktion.

f) $f(x) = \frac{(x-6)(x-1)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$, zur Zerlegung des Nenners ist hier Polynomdivision nötig.
Hebbare Definitionslücke bei $x_1 = 1$ und jeweils Polstelle 1. Ordnung mit Vorzeichenwechsel bei $x_2 = 2$ und bei $x_3 = 3$. $\tilde{f}(x) = \frac{(x-6)}{(x-2)(x-3)}$.

g) $x_1 = 1$ ist eine Polstelle 2. Ordnung ohne Vorzeichenwechsel,
$x_2 = -1$ eine hebbare Definitionslücke.
Stetige Fortsetzung $\tilde{f}(x) = \frac{(x-2)^2}{(x-1)^2}$.

h) $x_1 = 1$ hebbar,
$x_2 = -2$ Pol 1. Ordnung,
$x_3 = -3$ Pol 1. Ordnung.
$\tilde{f}(x) = \frac{1000(x-2)(x-3)}{999(x+2)(x+3)}$.

i) $x_1 = -1$ hebbar,
$x_2 = 1$ Pol 1. Ordnung.
$\tilde{f}(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

j) Keine Definitionslücken, denn der Nenner besitzt keine Nullstellen.

k) $f(x) = \frac{\frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 1}{4x^2 - 1} = \frac{\frac{4}{3}(x-1,5)(x+0,5)}{4(x+0,5)(x-0,5)} = \frac{(x-1,5)(x+0,5)}{3(x+0,5)(x-0,5)}$,
$x_1 = -0,5$ hebbar,
$x_2 = 0,5$ Pol 1. Ordnung.
$\tilde{f}(x) = \frac{(x-1,5)}{3(x-0,5)}$.

2. Der Satz ist wahr. Die Nullstellen im Nenner entsprechen genau den Defintionslücken der gebrochen-rationalen Funktion.